Convexité.

1. Montrer qu'une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.
2. *Inégalité arithmético-géométrique et inégalité de Carleman*
   (a) Justifier l'inégalité arithmético-géométrique :
   $$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$
   (b) Démontrer l'inégalité de Carleman : si les a_n sont des réels positifs, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \leq \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
   Indication : on pourra introduire $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ *et observer que* $c_1 \cdots c_n = (n+1)^n$ *et appliquer l'inégalité arithmético-géométrique à la famille* $(x_i = a_i c_i)$.
3. Démontrer l'*inégalité de Jensen* : soit (X, μ) un espace de proba ($\mu(X) = 1$), $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe, et $f : X \to I$ intégrable. Si $\varphi \circ f$ est positive <u>ou</u> intégrable, alors
   $$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu.$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$. La fonction f est-elle convexe ?
5. Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$, définie pour $x > 0$, est *log-convexe* (*i.e.* son log est convexe).
6. *Théorème de projection sur un convexe fermé*
   Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H.
   (a) Montrer que pour tout x dans H, il existe un unique élément y de C tel que $\|x - y\| = \min\{\|x - z\|, z \in C\}$. On note cet élément $p_C(x)$ et on l'appelle *projeté orthogonal* de x sur C.
   (b) Soient x et y dans H. Montrer que $y = p_C(x)$ si et seulement si $y \in C$ et $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$ pour tout z dans C.
   (c) Montrer que p_C est 1-lipschitzienne.
   (d) Montrer que $\langle p_C(x_1) - p_C(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0$ quels que soient x_1 et x_2 dans H.
   (e) *Application (supplémentaire orthogonal).* Montrer que si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, $F \oplus F^\perp = H$.
7. *Optimisation des fonctions convexes et descente de gradient*
   Soit D un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
   (a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes, en supposant D ouvert :
      i. f est convexe sur D,
      ii. pour tous x et y dans D, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$,
      iii. pour tous x et y dans D, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0$,
      iv. pour tous x dans D et h dans $\mathbb{R}^n$, $d^2f(x)(h, h) \geq 0$,
      v. pour tout x dans D, la hessienne $Hf(x)$ est positive.
   Qu'est-ce qui reste vrai si D n'est pas ouvert ?
   (b) Si f est convexe, montrer les propriétés suivantes :
      i. tout minimum local est global,
      ii. si x est un point critique de f (*i.e.* $\nabla f(x) = 0$), alors f atteint un minimum global en x,
      iii. l'ensemble des points où f atteint son minimum est convexe,
      iv. si f admet un maximum local ou global, il est situé sur le bord de D.
   (c) Soit $C > 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes, en supposant D ouvert :
      i. pour tous x dans D et h dans $\mathbb{R}^n$, $d^2f(x)(h, h) \leq C\|h\|^2$,
      ii. pour tout x dans D, les valeurs propres de la hessienne $Hf(x)$ sont toutes inférieures à C,
      iii. ∇f est C-lipschitzien.
   On peut dire que la dérivée seconde de f est uniformément bornée par C.
   (d) Soit $\alpha > 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes, en supposant D ouvert :
      i. pour tous x dans D et h dans $\mathbb{R}^n$, $d^2f(x)(h, h) \geq \alpha\|h\|^2$,
      ii. pour tout x dans D, les valeurs propres de la hessienne $Hf(x)$ sont toutes supérieures à α,
      iii. pour tous x et y dans D, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$,
      iv. pour tous x et y dans D, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \alpha\|y - x\|^2$.
   On dit alors que f est *elliptique*.

(e) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est elliptique, f atteint un minimum, local et global, en un unique point, qui sera noté dans la suite $\bar{x}$.

(f) Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Déterminer le gradient de f ainsi que sa dérivée seconde. Caractériser les points critiques de f. Montrer que f est convexe si et seulement si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que f est elliptique si et seulement si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

(g) On suppose dans cette question que $D = \mathbb{R}^n$, de sorte à pouvoir écrire directement un algorithme de descente de gradient.

  i. *Descente de gradient à pas fixe.* On suppose f elliptique et à dérivée seconde uniformément bornée. On choisit un point initial x_0 et on considère la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = x_n - \rho\nabla f(x_n)$. Donner les valeurs de ρ pour lesquelles $x \mapsto x - \rho\nabla f(x)$ est une contraction et justifier la convergence de l'algorithme dans ce cas. Estimer la vitesse de convergence $\|x_n - \bar{x}\|$.

  ii. *Descente de gradient à pas optimal.* On suppose seulement f elliptique. On choisit un point initial x_0 et on considère la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = x_n - \rho_n\nabla f(x_n)$, où ρ_n est un réel pour lequel $\rho \mapsto f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$ atteint son minimum.

    A. Montrer que l'algorithme est bien défini.

    B. Montrer que $\langle\nabla f(x_n), \nabla f(x_{n+1})\rangle = 0$ (en d'autres termes deux directions successives sont orthogonales).

    C. ($\star$) Montrer que l'algorithme de descente du gradient converge vers $\bar{x}$.
    Indication : on pourra montrer que $\|x_{k+1} - x_k\|$ *tend vers* 0 *avec* (d)iii. *et utiliser l'uniforme continuité de* ∇f *sur un compact approprié.*

(h) On suppose à présent que D est un convexe quelconque et on ne suppose plus a priori f convexe.

  i. *Inégalité d'Euler.* Montrer que si f atteint son minimum sur D en x, alors $\langle\nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$ pour tout y dans D. Montrer que la réciproque est vraie si f est convexe.

  ii. On suppose de plus D fermé et on note p la projection sur D. Montrer que si f atteint son minimum sur D en x, alors quelque soit $\rho > 0$, $x = p(x - \rho\nabla f(x))$. Montrer que la réciproque est vraie si f est convexe.

  iii. *Gradient projeté.* Si D est un convexe fermé et f est elliptique et à dérivée seconde bornée, proposer une modification de (g)i. pour adapter la descente de gradient au domaine de définition de f.

8. *Optimisation convexe sous contrainte affine*
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction affine non constante. On chercher à minimiser f sous la contrainte $g(x) = c$ pour c une constante réelle. Montrer que s'il existe un point $x^\star$ vérifiant la contrainte, et un multiplicateur de Lagrange $\lambda^\star$ tel que

$$\nabla f(x^\star) = \lambda^\star\nabla g(x^\star),$$

alors f est minorée sous la contrainte $g = c$ par une unique valeur $V(c)$, atteinte en $x^\star$.

Indication : on pourra définir le *lagrangien* associé à ce problème d'optimisation par $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$, pour $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$.

Question bonus : déterminer $V'(c)$ en ajoutant s'il le faut des hypothèses :-)

9. *Jauge d'un convexe*
Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de 0. La *jauge de* C est la fonction j_C définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$j_C(x) = \inf\left\{\lambda > 0, \quad \frac{x}{\lambda} \in C\right\}.$$

(a) i. Montrer que j_C est positivement homogène.

  ii. Montrer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad j_C(x) < 1\}$ si C est ouvert. Qu'en est-il si C est fermé ?

  iii. Montrer que j_C est sous-additive. *Remarque :* si C est symétrique par rapport à 0, j_C est une semi-norme.

(b) Soit C un compact contenant un voisinage de 0. Montrer que C est homéomorphe à la boule unité fermée.

10. *Fonction convexe conjuguée et mécanique analytique*
Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une fonction possédant une minorante affine. On définit sa transposée de Fenchel-Legendre sur $\mathbb{R}^d$ (en anglais *convex conjugate function*) par

$$f^\star(p) = \sup_x(p \cdot x - f(x)).$$

(a) Déterminer graphiquement $f^\star(p)$.

(b) Montrer que $f^\star$ est convexe.

(c) Montrer que $(f^\star)^\star$ est l'enveloppe convexe de f : $f^{\star\star}(x) = \sup\{\ell(x), \ell \text{ minorante affine de } f\}$.

(d) On suppose de plus que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est strictement convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et à croissance superlinéaire, c'est-à-dire que $\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

i. Montrer que $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

ii. Exprimer $f^\star$ en fonction de ∇f.

iii. Montrer que $f^\star$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\nabla f^\star(p) = (\nabla f)^{-1}(p)$ pour tout p dans $\mathbb{R}^n$.

(e) Soit $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement convexe par rapport à sa dernière variable, qu'on appellera *lagrangien*, et on suppose que sa transformée de Fenchel-Legendre par rapport à la dernière variable, qu'on nommera *hamiltonien*, est partout finie et de classe $\mathcal{C}^1$. On la note $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

i. *(Exemple : énergies...)* Soit $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un potentiel de classe $\mathcal{C}^1$, A une matrice symétrique définie positive et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ le lagrangien classique défini par

$$L(q, v) = \frac{1}{2} Av \cdot v - V(q).$$

Montrer que $H(q, p) = \frac{1}{2} A^{-1} p \cdot p + V(q)$.

ii. En toute généralité, montrer que $L(t, q, v) = \sup_p p \cdot v - H(t, q, p)$ pour tout $(t, q, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

iii. *Inégalité de Young.* Montrer que pour tout $(t, q, p, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$L(t, q, v) + H(t, q, p) \leq p \cdot v$$

avec égalité si et seulement $v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p)$ si et seulement si $p = \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v)$.

iv. Montrer que si L est strictement convexe et à croissance superlinéaire par rapport à sa dernière variable, $(q, v) \mapsto (q, \frac{\partial L}{\partial v}(t, q, v))$ est un homéomorphisme, qu'on notera Φ_t.

v. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une trajectoire de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que q une solution de l'*équation d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

si et seulement si $(q, p) := \Phi(q, \dot{q})$ est une solution du *système hamiltonien*

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(t, q(t), p(t)). \end{cases}$$

Question bonus : donner une condition suffisante pour l'existence de solutions au système hamiltonien, et une condition suffisante pour que ces solutions soient globales.

vi. Montrer que si H ne dépend pas du temps, H est conservé le long des solutions du système hamiltonien.